

文章编号: 1000-8055(2007)03-0450-04

多样本时间序列的 $P-T$ 曲线 可靠性评估方法

马小兵, 赵 宇

(北京航空航天大学 可靠性工程研究所, 北京 100083)

摘 要: 提出一种用于评估固体火箭发动机内弹道压强—时间曲线($P-T$ 曲线)的多样本时间序列方法. 该方法可以综合利用单条样本曲线数据内的纵向信息和多条样本曲线数据间的横向信息, 提高固体火箭发动机内弹道性能曲线可靠性评估的精度. 具体给出了等间距与非等间距情形下多样本 $P-T$ 曲线模型参数的极大似然估计方法以及当给定压强满足可靠性要求的上、下限时可靠度的点估计与区间估计计算公式. 文中最后给出了一个具体实例.

关 键 词: 航空、航天推进系统; 多样本时间序列; $P-T$ 曲线; 极大似然估计; 可靠性

中图分类号: V241.01

文献标识码: A

Method of reliability evaluation for $P-T$ curve based on multi-sample time series analysis

MA Xiaobing, ZHAO Yu

(Institute of Reliability Engineering,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: A reliability evaluation method for $P-T$ curve based on multi-sample time series analysis is proposed. The method can synthesize longitudinal and transverse information existing in performance curves, and evaluate the internal ballistic reliability of solid rocket engine with high precision. The maximum likelihood estimations of multi-sample time series with both equally and unequally spaced data are discussed in detail. Furthermore, the formulas of point estimation and confidence interval estimation are introduced when upper and lower limits of $P-T$ curve are assumed. An example is presented.

Key words: aerospace propulsion system; multi-sample time series; $P-T$ curve; maximum likelihood estimation; reliability

导弹的射程精度、卫星的入轨精度等都与火箭发动机内弹道性能(推力、压力、冲量等)有很大的关系,在导弹、卫星系统的总体设计中都对火箭发动机内弹道性能提出了高精度和高可靠性的要求.因此研究如何快速、经济、高精度地评估发动机内弹道性能具有重要的意义^[1,2].对固体火箭发动机内弹道性能评估试验而言,每次试验所得

到的数据量是很大的.每一条样本曲线中包含了不同时刻的内弹道数值,现行将其当作独立随机变量求均值和方差的评估方法精度偏低,其原因就在于没有把其工作历程当作一个随机过程来分析,也就没有充分地利用试验数据中的纵向信息^[3,4].实际上,这种纵向信息存在于试验曲线不同时刻所处状态的相互影响和相互联系之中,表

收稿日期: 2006-09-10; 修订日期: 2006-12-08

基金项目: 国家部委重点基金资助(9140A19030106H K0108)

作者简介: 马小兵(1978),男,陕西铜川人,北京航空航天大学可靠性工程研究所博士后,从事小样本可靠性技术研究.

现在内弹道性能数值在不同时刻间是互相关联的,它们是同一台发动机内弹道性能在不同时刻的表现.传统方法将不同时刻下的试验数据进行单独处理,未能准确描述内弹道曲线的模型规律,造成了大量试验信息的浪费.本文提出一种用于评估固体火箭发动机内弹道性能曲线的新方法:即从多样本时间序列的角度出发对其进行分析,研究这个过程的规律并建立相应模型;通过充分利用试验数据包含的样本信息,提高固体火箭发动机内弹道性能可靠性评估的精度.

1 多样本 P-T 曲线分析方法

设 $p(t_{ji})$, $i = 1, 2, \dots, n_j$ 是来自第 j ($j = 1, 2, \dots, m$) 次试验的一组压强值,且有 $p(t_{ji}) = \mu(t_j) + \xi(t_{ji})$. $\mu(t_j)$ 为第 j 条试验曲线的趋势项, $\xi(t_{ji})$ 为随机项.当 $p(t_{ji})$ 为平稳序列时, $\mu(t_j) = \mu$. 对于固定的某一时刻 t_i , $p(t_{ji})$ 反映了不同试验在该时刻压强变化的随机特性,且由工程经验可知其服从正态分布.

如对于任意的 t_{i_1} 和 t_{i_2} ($i_1 \neq i_2$ 且 $i_1, i_2 = 1, 2, \dots, n_j; j = 1, 2, \dots, m$) 有:

$$\tau_{i_1} = \tau_{i_2} \quad (i_1, i_2 = 2, 3, \dots, n_j) \quad (1)$$

式中 $\tau_{i_1} = t_{i_1} - t_{i_1-1}$, $\tau_{i_2} = t_{i_2} - t_{i_2-1}$. 则 $p(t_{ji})$ 为等间距时间序列.当公式(1)不成立时, $p(t_{ji})$ 则为非等间距 P-T 序列^[5]. 此时若对任意的 τ_{i_1} 与 τ_{i_2} 满足:

$$\tau_{i_1} = k\tau_{i_2} \quad (k \in N) \quad (2)$$

且至少存在一个 k 使得 $k \geq 2$ 成立, $p(t_{ji})$ 为有缺失观测的 P-T 序列,它是非等间距 P-T 序列的一种特例. 否则 $p(t_{ji})$ 即为完全非等间距 P-T 序列. 鉴于实际中发动机内弹道性能曲线多表现为自回归的形式,这里仅讨论 $p(t_{ji})$ 为自回归序列的情况.

当采样为等间距时,对于第 j 条试验曲线 P-T 曲线序列满足:

$$p(t_{ji}) - \mu - \sum_{k=1}^q \eta_k [p(t_{j(i-k)}) - \mu] = \varepsilon_i \quad (3)$$

$$E[\varepsilon_{i_1} \varepsilon_{i_2}] = \begin{cases} 0 & i_1 \neq i_2 \\ \sigma_\varepsilon^2 & i_1 = i_2 \end{cases} \quad (4)$$

在单条样本曲线观测数据量较大的情况下,模型参数 $\mu, \eta = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_q\}^T$, σ_ε^2 的对数似然函数由下式给出:

$$\ln L(\mu, \eta, \sigma_\varepsilon^2) = \sum_{j=1}^m \left\{ -\frac{n_j - q}{2} \ln(2\pi\sigma_\varepsilon^2) - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \times \sum_{i=q+1}^{n_j} [p(t_{ji}) - \mu - \sum_{k=1}^q \eta_k (p(t_{j(i-k)}) - \mu)]^2 \right\} \quad (5)$$

在求解由上式导出的极大似然方程组得到模型参数 μ, η 和 σ_ε^2 的估计值后,序列的自相关系数 ρ_k ($k = 1, 2, \dots, q$) 与方差 σ_ε^2 可进一步根据如下诸式求得:

$$(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q)^T = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{L} \rho \quad (6)$$

$$\rho_k = \eta_1 \rho_{k-1} + \eta_2 \rho_{k-2} + \dots + \eta_q \rho_{k-q} \quad (k = q+1, q+2, \dots) \quad (7)$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \eta_1 \rho - \eta_2 \rho^2 - \dots - \eta_q \rho^q} \quad (8)$$

$$\text{式中: } \mathbf{L} \rho = (\mathbf{L} \rho)^{q \times q} \quad (9)$$

$$\mathbf{L} \rho = (\mathbf{L} \rho)^{q \times 1} \quad (10)$$

$$l_{\rho kl} = \eta_{k-l} + \eta_{k+l} \quad (k, l = 1, 2, \dots, q) \quad (11)$$

$$l_{\rho k} = -\eta_k \quad (k = 1, 2, \dots, q) \quad (12)$$

其中:当 $k-l < 0$ 时,有 $\eta_{k-l} = 0$; 当 $k+l > q$ 时,有 $\eta_{k+l} = 0$.

若 $p(t_{ji})$ 为非等间距采样序列时, P-T 曲线由如下模型进行描述^[5,6]:

$$p(t_{ji}) - \mu - \sum_{k=1}^q \eta_k (\tau_{ji}) [p(t_{j(i-k)}) - \mu] = \varepsilon(\tau_{ji}) \quad (13)$$

式中 $\tau_{ji} = [\tau_{ji1}, \tau_{ji2}, \dots, \tau_{jiq}]^T$, $\tau_{jik} = t_{ji} - t_{j(i-k)}$ ($k = 1, 2, \dots, q$). $\varepsilon(\tau_{ji})$ 相互独立且服从 $N(0, \sigma_\varepsilon^2 \varphi(\alpha, \tau_{ji}))$, 其中 $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q]^T$ 且 $\alpha \neq \alpha$ ($i, j = 1, 2, \dots, q$). $\varphi(\alpha, \tau_{ji})$ 由下式给出:

$$\varphi(\alpha, \tau_{ji}) = 1 - 2 \sum_{k=1}^q \eta_k (\tau_{ji}) \rho_{ik} + \sum_{l,s=1}^q \eta_l (\tau_{ji}) \eta_s (\tau_{ji}) \rho_{i(l-s)} \quad (14)$$

式中: $i' = i - \min(l, s)$. 当 $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2]^T$ 且 $\alpha = \alpha$ 时, $\varphi(\alpha, \tau_{ji})$ 的形式由文献[7]给出.

自回归系数 $\eta = [\eta_1(\tau_{ji}), \eta_2(\tau_{ji}), \dots, \eta_q(\tau_{ji})]^T$ 可由 Yule-Walker 方程求解:

$$\eta = \mathbf{V}_{ji}^{-1} \rho_{ji} \quad (15)$$

式中:

$$\mathbf{V}_{ji} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{(i-1)1} & \dots & \rho_{(i-1)(q-1)} \\ \rho_{(i-1)1} & 1 & \dots & \rho_{(i-2)(q-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{(i-1)(q-1)} & \rho_{(i-2)(q-2)} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

并且有 $\theta_i = \{\theta_{i1}, \theta_{i2}, \dots, \theta_{ij}\}^T$. 相关系数函数 θ_{uw} 为:

$$\theta_{uw} = \sum_{i=1}^q \beta_i e^{\alpha_i^T \tau_{juw}} \setminus \sum_{i=1}^q \beta_i \tag{17}$$

其中:

$$\beta_i = \lambda \sum_{k=1}^q \frac{\lambda_k}{\alpha_i + \alpha_k} \tag{18}$$

$$\lambda = 1 \setminus \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^q (\alpha_i - \alpha_k) \tag{19}$$

此时, $p(t_{ji})$ 序列样本的对数极大似然函数由下式给出:

$$\ln L(\mu, \alpha, \sigma_\xi^2) = \sum_{j=1}^m \left\{ -\frac{n_j - q}{2} \ln(2\pi\sigma_\xi^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=q+1}^{n_j} \ln \varphi(\alpha, \tau_{ji}) - \frac{\left[p(t_{ji}) - \mu - \sum_{k=1}^q \lambda_k(\tau_{ji})(p(t_{j(i-k)} - \mu)) \right]^2}{2\sigma_\xi^2 \varphi(\alpha, \tau_{ji})} \right\} \tag{20}$$

2 P-T 曲线可靠性评估方法

如下给出当给定 P-T 曲线压强上限 p_U 与下限 p_L 时, P-T 曲线的可靠性评估方法.

2.1 可靠度的点估计

当 $p(t_{ji}) \sim N(\mu, \sigma_\xi^2)$ 时, 求解由公式(5)或公式(20)导出的似然方程组得到模型参数的估计值后, $p(t_{ji})$ 位于区间 $[p_L, p_U]$ 的概率, 即可靠度的估计值由下式计算:

$$R = \Pr\{p_L \leq p(t_{ji}) \leq p_U\} = \Phi\left(\frac{p_U - \mu}{\sigma_\xi}\right) - \Phi\left(\frac{p_L - \mu}{\sigma_\xi}\right) \tag{21}$$

2.2 可靠度的区间估计

由于公式(21)中 μ, σ_ξ 均为模型参数 μ, σ_ξ 的估计值, 因此据此求得的 R 为可靠度的点估计, 而工程实际中往往要求给出可靠度的区间估计. 此时, R 的上下限估计 R_U, R_L 可由如下诸式计算.

首先, 由正态母体在给定上限(下限)值的百分率置信区间公式^[8,9]:

$$P_U = \Phi(u_{P_U}) \tag{22}$$

$$P_L = \Phi(u_{P_L}) \tag{23}$$

其中:

$$u_{P_U} = \frac{p - \mu}{\sigma_\xi} \sqrt{\frac{2m - 4}{2m - 3}} + u_Y \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{(p - \mu)^2(2m - 4)}{\sigma_\xi^2 w(2m - 3)}} \tag{24}$$

$$u_{P_L} = \frac{p - \mu}{\sigma_\xi} \sqrt{\frac{2m - 4}{2m - 3}} - u_Y \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{(p - \mu)^2(2m - 4)}{\sigma_\xi^2 w(2m - 3)}} \tag{25}$$

式中, 当 $P \leq 0.5$ 时 $w = w_1$; 当 $P > 0.5$ 时 $w = w_2$, 并且:

$$w_1 = 2 \left[m + u_Y - 1.64 - \frac{1}{\sqrt{m + u_Y - 1.64}} \right] \tag{26}$$

$$w_2 = 2 \left[m - 0.24u_Y - 1 - \frac{1}{\sqrt{m - 0.24u_Y - 1}} \right] \tag{27}$$

区间 $[p_L, p_U]$ 为百分率为 P 的置信度为 $2Y - 1$ 的置信区间.

当给定 $p(t_{ji})$ 序列上限 p_U 和下限 p_L 时, 百分率 $F(p_U)$ 和 $F(p_L)$ 的置信度为 Y 的单侧置信上、下限 P_{1U}, P_{1L} 和 P_{2U}, P_{2L} 满足:

$$\Pr\{F(p_U) - F(p_L) \geq P_{2L} - P_{1U}\} \geq 2Y - 1 \tag{28}$$

$$\Pr\{F(p_U) - F(p_L) \leq P_{2U} - P_{1L}\} \geq 2Y - 1 \tag{29}$$

则 $p(t_{ji})$ 位于区间 $[p_L, p_U]$ 中概率 R 的置信度至少为 $2Y - 1$ 的置信区间上、下限为:

$$R_L = P_{2L} - P_{1U} \tag{30}$$

$$R_U = P_{2U} - P_{1L} \tag{31}$$

3 应用实例

为衡量某型发动机的内弹道性能, 试验采集了 8 条 P-T 样本曲线, 在试验平稳段 20~ 85 s 内

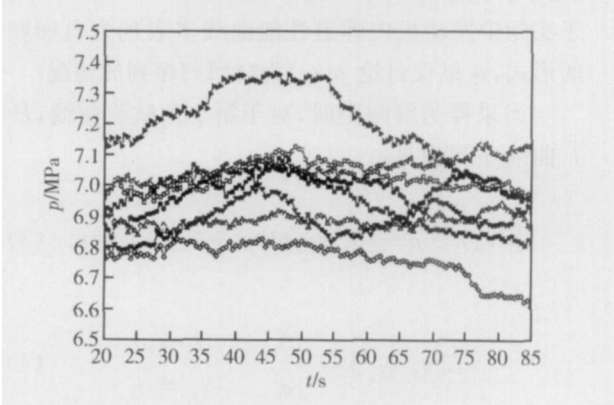


图 1 某型固体发动机内弹道试验 P-T 曲线
Fig. 1 Interior ballistics P-T curve of certain solid engine

每隔 0.5 s 采集一点, 每条样本曲线上有 131 个采集点(如图 1 所示). 根据设计要求, 现需评估在该平稳段内 P - T 曲线位于区间[6.5, 7.7] (单位: MPa) 内的可靠性.

根据文中计算方法, 模型参数的估计结果如表 1 所示.

表 1 模型参数估计结果

Table 1 Estimation result of model parameters

模型参数	估计值
μ/MPa	6.969
η	0.994
$\sigma_{\varepsilon}^2/10^{-3}\text{MPa}^2$	0.161
$\sigma_{\eta}^2/\text{MPa}^2$	0.0135

将表 1 参数计算结果带入公式(21) 即得该 P - T 曲线位于区间[6.5, 7.7] (单位: MPa) 中可靠度的点估计为:

$$R = \Pr\left\{6.5 \leq p(t_{ji}) \leq 7.7\right\} = \Phi\left(\frac{6.5 - 6.969}{0.116}\right) - \Phi\left(\frac{7.7 - 6.969}{0.116}\right) = 0.99997$$

当 $v=0.7$ 时, 由公式(28)~(31) 计算可得 P - T 曲线位于区间[6.5, 7.7] (单位: MPa) 内可靠度的下限至少为:

$$R_L \geq \Phi(u_{p_U})_{p=7.7} - \Phi(u_{p_U})_{p=6.5} = 0.9995$$

4 结 论

(1) 提出了一种用于固体火箭发动机内弹道 P - T 曲线可靠性评估的多样本时间序列方法. 通过确定其在时间尺度上的纵向变化关系以及空间尺度上的横向随机特性, 建立了固体火箭发动机内弹道性能的动态时序模型.

(2) 与现行方法相比, 该方法能够综合利用单条性能曲线数据内的纵向信息和多条性能曲线数据间的横向信息, 实现 P - T 曲线可靠性的高精度评估.

(3) 本文方法除适用于 P - T 曲线外, 还可应用于固体火箭发动机其它内弹道特性曲线的建模与可靠性评估. 当特性曲线中存在解释变量时, 可结合文献[10] 方法进行分析.

(4) 还可通过综合利用相似产品科研试验数据中的共性信息, 在保障评估精度不变的前提下合理减少内弹道性能试验的次数. 为固体火箭发

动机的设计定型提供经济实用的科学依据.

参考文献:

[1] Turner M J L. Rocket and spacecraft propulsion: principles, practice, and new development[M]. Berlin: Springer, 2000.

[2] 甘楚雄, 刘冀湘. 弹道导弹与运载火箭总体设计[M]. 北京: 国防工业出版社, 1996.

GAN Chuxiong, LIU Jixiang. The concept design of ballistic missile and carrier rocket[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1996.

[3] 武晓松, 陈军, 王栋, 等. 固体火箭发动机工作过程数值仿真[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

WU Xiaosong, CHEN Jun, WANG Dong, et al. Numerical simulations of working progress of solid rocket engine[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006.

[4] 方国尧, 张鸿涛. 固体火箭发动机系统可靠性分析与设计[M]. 北京: 宇航出版社, 1992.

FANG Huoyao, ZHANG Hongtao. Reliability analysis and design for solid rocket motor[M]. Beijing: Astronautics Publishing House, 1992.

[5] 马小兵, 傅惠民. 非等间距相关系数平稳序列分析方法[J]. 航空动力学报, 2003, 18(4): 470-476.

MA Xiaobing, FU Huimin. Analysis method for correlation coefficient stationary series with unequally spaced data[J]. Journal of Aerospace Power, 2003, 18(4): 470-476.

[6] 杨叔子, 吴雅. 时间序列分析的工程应用[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1991.

YANG Shuzi, WU Ya. Time series analysis and its application[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 1991.

[7] MA Xiaobing, FU Huimin. Method of unequally spaced CCAR(2) series with double roots for pressure time trace analysis[A]. Theory and Practice of Energetic Materials VI Proceedings of 2005 International Autumn Seminar on Propellants, Explosives and Pyrotechnics [C]. Science Press, 2005: 1085-1090.

[8] 傅惠民. 正态分布百分位值和百分率的置信限和容忍限公式[J]. 航空学报, 1994, 15(1): 94-101.

FU Huimin. Formulas for tolerance limits and confidence limits of normal population percentiles and percentages [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1994, 15(1): 94-101.

[9] 高镇同. 疲劳应用统计学[M]. 北京: 国防工业出版社, 1986.

GAO Zhentong. Fatigue applied statistics[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1986.

[10] 马小兵, 傅惠民. 异方差回归-时序模型[J]. 机械强度, 2006, 28(1): 51-54.

MA Xiaobing, FU Huimin. Heteroscedastic model of regression time series[J]. Journal of Mechanical Strength, 2006, 28(1): 51-54.